

HM III (Scheinlausur 1)

Wegintegral: Fkt.: $\int_K f ds = \int_a^b f(y(t)) \cdot \|y'(t)\|_2 dt$
(Arbeitsintegral)

$Kf: \int_K \langle V, dx \rangle = \int_a^b \langle V(y(t)), y'(t) \rangle dt$

Oberflächenintegral:
(Flussintegral)

allg.: $\int_\gamma f ds = \int_U f(y(u)) \cdot \sqrt{g(u)} du$ mit $g(u) = \det \begin{pmatrix} y'_1(u) & y'_2(u) \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$: $\int_\gamma f ds = \int_U f(y(u)) \cdot \left\| \frac{\partial y}{\partial u_1} \times \frac{\partial y}{\partial u_2} \right\|_2$ (bei $Kf: \int = \int V \cdot \underline{n} = \int V(u) \cdot (x', y')$)

d=n-1: $g(u) = \left\| \frac{\partial y}{\partial u_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial y}{\partial u_{n-1}} \right\|_2^2$ mit äußeren Produkt: $\omega = \begin{pmatrix} \det M_n \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} \det M_n \end{pmatrix}$ und $M_i = (u_{i1}, \dots, u_{i,n-1}, u_{i,n})$

Graph: $\int_\gamma f ds = \int_U f(u, h(u)) \sqrt{1 + \|\nabla h\|_2^2} du$

Gauß: allg.: $\int_G \langle V, \underline{n} \rangle ds = \int_G \operatorname{div} V dx$
Oberflächenintegral über Vol

Vorr.: V stet./diff. auf $G \cup \partial G$

(\underline{n} ist normiertes äußeres Produkt d. Spalten d. Fkt.-Matrix)

(*) \mathbb{R}^2 : $\int_{\partial G} f dy - g dx = \int_G \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) d(x,y)$ (für Flächenberechnung: $f(x,y)=x, g(x,y)=y$)

Stokes: allg.: $\int_{\partial G} \omega = \int_G d\omega$ (für $Kf: V = (V_1, \dots, V_n): \omega = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} V_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_j \wedge \dots \wedge dx_n$
alle außer i)

\mathbb{R}^3 : $\int_{\partial G} \langle V, dx \rangle = \int_G \langle \operatorname{rot} V, \underline{n} \rangle d\sigma$
(Oberflächenintegral über Wirbelfeldern)

es gilt: $dx_i \wedge dx_i = 0$
 $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$

(*) alternativ: V mit $\operatorname{div} V = 1$

$\underline{n} = \begin{pmatrix} y_2' \\ -y_1' \end{pmatrix}$

Schnurpunkt: $S_j = \frac{1}{L} \int_0^L y_j(t) \cdot \|y'(t)\| dt$ (y = Kreisbogen)

allg.: $S_j = \frac{1}{V} \iiint_K x_j dV$ (rot, rinst)

Guldin'sche Formel (Mittelwertsatz): $A = 2\pi \cdot L \cdot S_y$ (bei Rot. um y-Achse)
Länge d. Kurve, Abstand Schnurpunkt zu Drehachse

(ii) (Volumen): $V = 2\pi \cdot A \cdot R$ (R = Radius Schnurmittelpunkts)

Kugelkoordinaten: (i) Abstand: $(r, \varphi, \psi) \rightarrow \begin{pmatrix} r \cdot \sin \varphi \cdot \cos \psi \\ r \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi \\ r \cdot \cos \varphi \end{pmatrix}$
 $\varphi \in (0, \pi)$
 $\psi \in (0, 2\pi)$
 $dV = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\psi$

(ii) Geograph. Bsp.: $(r, \varphi, \psi) \rightarrow \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \cdot \cos \psi \\ r \cdot \cos \varphi \cdot \sin \psi \\ r \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$ $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
 $\psi \in (0, 2\pi)$

Zylinder $n=1$: $\begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$ $dV = r dr d\varphi dz$

Polar: $\begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$ $dV = r dr d\varphi$

Momente (für Stokes, Gauß etc.):

$z = f(x,y) \Rightarrow \underline{n} = \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix}$

Technikum FLT - Theorie

$$f = g + ih \Rightarrow f \text{ komplex diffbar} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial g}{\partial y} = - \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\Rightarrow f \text{ holomorph} \Leftrightarrow \Delta g = \Delta h = 0$$

Cauchy Int.-Satz : $\oint_{\partial G} f dz = 0 \Leftrightarrow f \text{ holomorph auf } G \cup \partial G$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z-z_0} dz \quad \text{bzw.} \quad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

Residuensatz : $\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum \text{res}(f, z_i)$ mit z_i innerhalb γ

$$\bullet \text{ Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} \left[(z-z_0)^n \cdot f(z) \right]$$

$$\bullet R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad \text{mit } P, Q \text{ Polynome und } \text{grad } Q > \text{grad } P + 2 \Rightarrow \sum \text{res} R = 0$$
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } z < 0} \text{res } R(z)$$

$$\bullet \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{iz}$$

$$\bullet \text{ Nullstellenzähler: } \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} dz = \#_{NS} - \#_{PS} \quad (\text{mit } \gamma f)$$

$$(i) \quad |a+b| \leq |a| + |b|$$

$$(ii) \quad |a+b| \geq |a| - |b|$$

$$\frac{1}{|a+b|} \leq \frac{1}{|a|-|b|} \quad \text{für } a > b$$

Picard-Lindelöf: $\varphi_0(t_0) = x_0$
 $\varphi_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(\tau, \varphi_{k-1}(\tau)) d\tau$

Potenzreihenansatz: $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ in Dgl einsetzen, Koeff.-Vgl.

Gebrauchte Variablen: $y' = f(x) \cdot g(y)$
 $\hookrightarrow \frac{y'}{g(y)} = f(x) \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$

darauf lässt sich zurückführen:

(i) $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ Subst.: $w = \frac{y}{x}$

$\hookrightarrow \frac{w'}{f(w)-w} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{dw}{f(w)-w} = \int \frac{dx}{x}$

(ii) $y' = f(ax+by+tc)$ Subst.: $w = ax+by+tc$

Lineare Dgl's: $y' = A \cdot y + b$ $C = \int_0^t E(s)^{-1} \cdot b(s) ds$
 \hookrightarrow EW, EV bestimmen $\vec{y}_{ges} = E \cdot \vec{c}(t)$
 $\hookrightarrow \vec{F}_{ges} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$F(x_1, y_1, y', \dots, y^{(n)}) = 0$

• Nullstellen d. charakt. Polynoms bestimmen

Lsg. d. Form $c \cdot e^{2t}$, $c \cdot t \cdot e^{2t}$, ...

Variation d. Konstanten: (ca. Bsp. einer separablen Dgl. 1. u. 2. Ordng)

$y' = a(x) \cdot y + b(x)$

(i) homogene Lsg.: $y_{hom} = c \cdot e^{\int a(x) dx}$

(ii) $y_{part} = C(x) \cdot e^{\dots}$

\hookrightarrow in Dgl einsetzen

| inhomogene Dgl n-ter Ordng | | | | |
|----------------------------|---------------|---------|---------------|-------------------|
| c_1' | c_2' | \dots | c_n' | |
| y_1 | y_2 | \dots | y_n | \vec{g} |
| y_1' | y_2' | \dots | y_n' | \vec{g}' |
| $y_1^{(n-1)}$ | $y_2^{(n-1)}$ | \dots | $y_n^{(n-1)}$ | $\vec{g}^{(n-1)}$ |
| $y_1^{(n)}$ | $y_2^{(n)}$ | \dots | $y_n^{(n)}$ | $\vec{g}^{(n)}$ |

$y'' = f(y) \quad | \cdot 2y'$

$(y')^2 = 2 \cdot F(y)$, wobei $F' = f$

Exakte Dgl:

$p(x,y) dx + q(x,y) dy = 0$ exakt

$\Rightarrow p_y = q_x$

\hookrightarrow Stammfkt.: $F_x = p$
 $F_y = q$

Lsg. laufen auf Niveaueinen

falls nicht exakt:

multipl. mit μ :

$p_y \cdot \mu + p \cdot \mu_y = q_x \cdot \mu + q \cdot \mu_x$

\Downarrow

$\mu = \mu(x)$

$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{p_y - q_x}{q}$ (nur von x abh.)

$\mu = \mu(y)$

$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{q_x - p_y}{p}$ (nur von y abh.)

$\mu = \mu(x,y)$

$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{q_x - p_y}{x p - y q}$ (nur von x-y abh.)

$\mu = \mu(x+y)$

$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{q_x - p_y}{p - q}$ (nur von x+y abh.)

Ansatz-Methode (nur partielle Lsg.)

$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = p \cdot e^{\mu t}$

Ansatz: $y = q(t) \cdot e^{\mu t}$

mit $\text{grad } q = \begin{cases} \text{grad } p & \text{wenn } \mu \text{ keine NS d. charakt. Polynom} \\ \text{grad } p + \mu f & \text{wenn } \mu \text{ NS} \end{cases}$

Bernoulli-Dgl.:

$y' = a(x) \cdot y + b(x) \cdot y^\alpha$

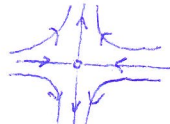
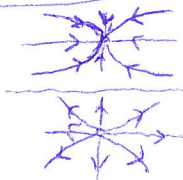

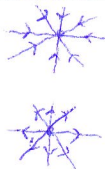

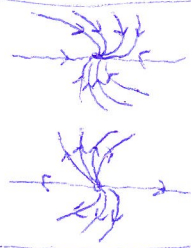
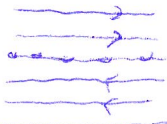


$w = y^{1-\alpha} \rightarrow$ lineare DGL 1. Ordnung

Riccati-Dgl:

$y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2$

φ = part. Lsg. $\Rightarrow w = \frac{1}{y-\varphi} \rightarrow$ lineare DGL 1. Ordnung

Zu Phasendiagrammen:

| | | | |
|---|--|--------------------|---|
| $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ | $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ instabil | Sattelpunkt |  |
| $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ | $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ asympt. stabil $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ instabil | Knoten 2. Art |  |
| $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ | $\lambda < 0$ stabil $\lambda > 0$ instabil | Gerade v. Ruhelage |  |
| $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ | $\lambda < 0$ asympt. stabil $\lambda > 0$ instabil | Knoten 1. Art |  |
| $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ | stabil | Ebene von Ruhelage |  |
| $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ | $\lambda < 0$ asympt. stabil $\lambda > 0$ instabil | Knoten 3. Art |  |
| $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ | instabil | Gerade v. Ruhelage |  |
| $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ | $\alpha < 0 \neq \beta$ asympt. stabil $\beta \neq 0 < \alpha$ instabil | Strudelpunkt |  |
| $\begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ | $\beta \neq 0$ stabil | Zentrum |  |